

Title	Discrete Approximationとその周辺 (待ち行列理論とその応用 II)
Author(s)	木村, 俊一
Citation	数理解析研究所講究録 (1982), 452: 273-290
Issue Date	1982-02
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/102964">http://hdl.handle.net/2433/102964</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## DISCRETE APPROXIMATION とその周辺

東京工業大学 理学部

木村 俊一

### 0. はじめに

本稿では、 $GI/G/1$  待ち行列系での客の待ち時間分布を数値的に求めるための一つの手法：Discrete Approximation（記語はまだ定まっていなが、以下では、離散近似と認することにする。）を取り上げる。離散近似が、到着時間間隔及びサービス時間の分布関数を格子分布で近似したときの Lindley の積分方程式の別な表現に相当することを示し、著者の考えによる数値解法：Sequential PL Approximation との関連について考察する。

### 1. 準備

1-1. まず、以下で必要となる幾つかの記号と仮定を導入する。

$t_n$  : 第  $n$  番目の客の到着時刻,  $t_0 \equiv 0$ .

$U_n = t_{n+1} - t_n$  : i.i.d.r.v. with a d.f.  $A(t) = P\{U_n \leq t\}$

$v_n$  : 第  $n$  番目の客のサービス時間

i.i.d.r.v. with a d.f.  $B(t) = P\{v_n \leq t\}$

< 仮定 1 >  $\{U_n\}$  と  $\{v_n\}$  は互いに独立。

< 仮定 2 >  $A(0) = 0, B(0) = 0$

< 仮定 3 >  $A(\cdot), B(\cdot)$  は可算個の第一種不連続点を含んでいても構わないが、不連続点は、(以下で定義する基本単位)  $\tau$  の整数倍の点に限る。

$\xi_n = v_n - U_n$  : i.i.d.r.v. with a d.f.  $K(t) = P\{\xi_n \leq t\}$

$\{\xi_n\}$  の独立性は < 仮定 1 > より従う。また、分布  $K(\cdot)$  は

$$K(t) = \int_0^\infty \{1 - A(x-t)\} dB(x) \quad (1)$$

$$\text{又は,} \quad = \int_0^\infty B(t+x) dA(x) \quad (1')$$

と表わすことができる。(以下、(1), (1') によって導かれる式には、夫々に対応して式番号にダッシュを付けて区別することにする。)

$w_n$  : 第  $n$  番目の客の待ち時間,  $w_0 \equiv 0$ .

$$W^{(n)}(t) = P\{w_n \leq t\}, \quad W(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(t)$$

1-2. 簡単な考察から、以下で基本的な役割を果たす  $\{w_n\}$  に関する漸化式:

$$w_{n+1} = \max(w_n + \xi_n, 0), \quad n \geq 0, \quad (2)$$

が導かれる。この(2)によって生成される系列  $\{w_n, n \geq 0\}$  は、Lindley 過程と呼ばれる。Spitzer[7]は、(2)を直接用いて、母関数:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} dw^{(n)}(t) \\ = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} P \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \leq 0 \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_0^{\infty} e^{-st} dK^{*n}(t) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

for  $|z| < 1, \operatorname{Re} s > 0,$

を導いた。Lindley[6]は、 $\{w^{(n)}(\cdot)\}$  が Wiener-Hopf 型の積分方程式

$$w^{(n+1)}(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t w^{(n)}(t-u) dK(u), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (4)$$

を満たすことを示した。(3), (4) 共に、実際に数値を得るのに適した形と言ひ難い。定常分布(存在するとして)に対しても(3), (4)は夫々、

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dw(t) = \exp \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} (1 - e^{-st}) dK^{*n}(t) \right], \quad (5)$$

for  $\operatorname{Re} s > 0,$

$$w(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t w(t-u) dK(u), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

と表わされ、これらもそれ程簡単に解けそうにないことがわかる。

1-3. Kleinrock [5] は彼のテキストの中で、到着時間間隔とサービス時間が、基本となる時間単位  $\tau > 0$  の整数倍に限られる場合を扱い、これを離散近似と呼んでいる。すなわち、離散確率分布

$$a(k) = P\{u_n = k\tau\}, \quad b(k) = P\{v_n = k\tau\}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

によって、系の確率的構造を決定しようというわけである。しかし、彼自身も

... Just how one goes about choosing this approximation is as yet basically unstudied and the only recommendation we make at this point is that if one wishes to represent a continuous distribution with a finite set of discontinuities then one should use this approximation to match as many of the moments of the original distribution as possible, working from the first moment and proceeding upwards. ....

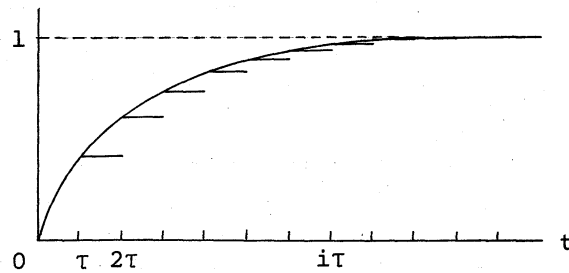
(from [5, p. 51])

と述べているように、近似と呼ぶには元の系との関係、とりわけ  $\{a(k)\}, \{b(k)\}$  と  $A(\cdot), B(\cdot)$  との関係が明らかに示されていない。次節では、Lindley の複合方程式 (4) から、この点に対する一つの解を与える。

## 2. 離散近似

分布  $A(\cdot)$  及び  $B(\cdot)$  を共に下図 1 に示すような等しい格子幅  $\tau$  ( $>0$ ) を持つ格子分布 (lattice distribution) で近似する。

図 1.



すなわち、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$  に対して

$$A(t) = A_i \triangleq A(i\tau) \quad i = 0, 1, \dots$$

$$B(t) = B_i \triangleq B(i\tau)$$

という近似を行なう。〈仮定 2〉より明らかに、 $A_0 = B_0 = 0$ 。

このとき、(1)又は(1')より、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$  に対して

$$K(t) = \text{const.} \triangleq K_i \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j) A_{j-i} \quad (7)$$

又は、

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j) B_{i+j+1} \quad (7')$$

と表わせる。従って、 $K(\cdot)$  もまた同じ格子幅  $\tau$  を持つ格子分布になる。 $w^{(0)}(t) = U(t)$  (単位階段関数) より、 $w^{(0)}(t) = K(t)$  となり、 $w_1$  の分布もまた格子分布となる。以下、数学的帰納法により、一般の  $n$  に対しても  $w_n$  の分布が格子分布に

なることが容易に示せる。すなわち、 $iT \leq t < (i+1)T$  に対して、

$$W^{(n)}(t) = W_i^{(n)} = \text{const.}$$

と表わせるものとする。(4)より、やはり  $iT \leq t < (i+1)T$  に対して、 $(i=0, 1, \dots)$

$$\begin{aligned} W^{(n+1)}(t) &= \int_{-\infty}^t W^{(n)}(t-u) dK(u) \\ &= \sum_{k=-\infty}^i W^{(n)}(t-kT) (K_k - K_{k-1}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^i W_{i-k}^{(n)} (K_k - K_{k-1}) = \text{const.} \end{aligned}$$

となり、確かに全ての  $n \geq 0$  に対して、 $W^{(n)}$  は格子幅  $T$  の格子分布になる。まとめると、

$$W_i^{(n+1)} = \sum_{j=-\infty}^i W_{i-j}^{(n)} (K_j - K_{j-1}), \quad (8)$$

又は、

$$W_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} W_j^{(n)} (K_{i-j} - K_{i-j-1}), \quad (9)$$

以下では、(8)又は(9)を、Kleinrock[5]が与えた離散近似と等価であることを示そう。まず、

$$\begin{cases} p_n(i) = W_i^{(n)} - W_{i-1}^{(n)}, & i \geq 1 \\ p_n(0) = W_0^{(n)}, \end{cases}$$

$$c(i) = K_i - K_{i-1}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

と定義する。また、離散たたみこみ (discrete convolution) と、任意の二つの離散確率分布  $\{f(i)\}, \{g(i)\}$  に対して、

$$f(i) * g(i) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(i-j) g(j) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j) g(i-j)$$

で定義する。特に、 $\{f(i)\}, \{g(i)\}$  の内、いずれか一方、例えば、 $\{f(i)\}$  が、非負整数上でしか定義されていないときは、

$$f(i) * g(i) = \sum_{j=-\infty}^i f(i-j) g(j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) g(i-j)$$

で与えられる。  $i \geq 1$  に対して、(8) より、

$$\begin{aligned} p_{n+1}(i) &= \sum_{j=-\infty}^i w_{i-j}^{(n)} (K_j - K_{j-1}) - \sum_{j=-\infty}^{i-1} w_{i-j-1}^{(n)} (K_j - K_{j-1}) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{i-1} p_n(i-j) c(j) + w_0^{(n)} c(i) \\ &= \sum_{j=-\infty}^i p_n(i-j) c(j) \\ &= p_n(i) * c(i), \end{aligned}$$

$i=0$  に対しては、

$$\begin{aligned} p_{n+1}(0) &= \sum_{j=-\infty}^0 w_{-j}^{(n)} c(j) \\ &= \sum_{j=-\infty}^0 \left( \sum_{k=j}^0 p_n(k-j) \right) c(j) \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 \sum_{j=-\infty}^k p_n(k-j) c(j) \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 p_n(k) * c(k) \end{aligned}$$

と書き表わせる。結局、 $i \geq 0$  に対して

$$p_{n+1}(i) = \pi(p_n(i) * c(i)) \quad (10)$$



ここで、 $\pi(\cdot)$  は任意の数列  $\{x(k)\}$  に対して

$$\pi(x(k)) = \begin{cases} x(k), & k \geq 1 \\ \sum_{j=-\infty}^0 x(j), & k = 0 \\ 0, & k \leq -1, \end{cases} \quad (11)$$

で定義される。また、 $\{c(i)\}$  については、(7)より、

$$\begin{aligned} c(i) &= \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - A_{j-i}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (B_j - B_{j-1})(A_{j-i} - A_{j-i-1}) \end{aligned}$$

と表わせる。ここで

$$\begin{cases} a(j) = A_j - A_{j-1}, & j \geq 1, \\ a(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} b(j) = B_j - B_{j-1}, & j \geq 1 \\ b(0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} c(i) &= \sum_{j=0}^{\infty} b(j) a(j-i) \\ &= a(-i) * b(i) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。(10), (13)は、確かに Kleinrock が与えた離散近似と一致し、(12)が元の系との関係、すなわち、格子分布による近似に他ならないことを示している。

Remark. 関係式(8)が、(10)及び(13)と等価であることを示した。数値計算を行なう上では、(8)の方が優れている。何故なら、(10)では、 $p_{n+1}(0)$  を計算する際に、 $k \leq 0$  に対する  $p_n(k) * c(k)$  の

値を計算する必要が生じるのに対し、(8)あるいは(9)では、 $w_k^{(n)}$ の値が非負の値だけに着目していればよいからである。夫々の式で現われる無限級数を原点に関して対称に打ち切った場合には、(8)ではたまたみこみ項数が(10)に比べて約半減であるため、直接たまたみこみを計算するときには (cf. [1,2])、その手間数は約  $\frac{1}{4}$  になる。

関係式(12)は、離散近似によって重大な性質、ある意味では致命的な欠陥を示唆している。よく知られているように、 $A(\cdot)$  又は  $B(\cdot)$  が格子分布で与えられるとき、定常分布  $w(\cdot)$  の存在は一般に保証されない。分布  $w^{(n)}(\cdot)$  が実際に収束しない場合、その顕著な挙動は、 $n$  がある正数  $N$  を越えた点から振動を開始することである。これは、 $\{w_i^{(n)}\}$  から  $\{w_i^{(n+1)}\}$  を計算する関係式(8)を、離散確率分布の空間上での写像と考えた場合、それが縮小写像にはなっていないことに起因している。

以上より、少くとも離散近似の一つの解釈としての(12)による離散化は、自然ではあるが、離散近似が数値的に常に安定であるためには不適当であることがわかる。しかし実際には、振動を開始する  $N$  の値が十分大をいために、振動を開始する以前に、適当に与えた収束判定条件を満たしてしまう場合が多い。筆者が行なった  $E_k/E_e/1$ ,  $E_k/H_e/1$ ,  $H_k/E_e/1$  系に対する

数値実験では、 $n$ が小さい値での振動は全く見られなかった。恐らく、病的な例は別として、Erlang 分布や超指数分布を(12)で離散化した『素直な』分布では、実際上必要な精度の幅での振動は見出し難いのではないかとと思われる。しかし、いずれにしても、分布  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  から  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  への離散化に関して、

① 数値的に安定な離散化の方法

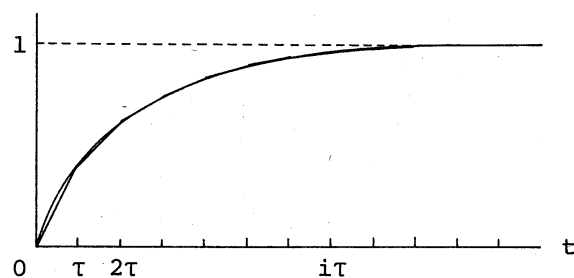
② Kleinrock の意味で、元の分布の情報を失わない離散化の方法

を検討する必要がある。

### 3. Sequential PL Approximation

筆者は、格子分布近似した Lindley の積分方程式が、いわゆる離散近似に相当することに着目して、区分的線形近似 (Piecewise Linear (PL) approximation) による Lindley の積分方程式の新しい数値解法を提案した[4]。すなわち、分布  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  を共に下図2に示すような等しい区間幅  $\tau (> 0)$  の連続な区分的線形関数で近似する。

図2.



すなわち、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$  に対して、

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{\tau} (A_{i+1} - A_i)(t - i\tau) + A_i \\ B(t) &= \frac{1}{\tau} (B_{i+1} - B_i)(t - i\tau) + B_i \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

という近似を行なう。ここで、以下の議論の見通しを良くするために、仮定3の代わりに次のことを仮定する。

<仮定3'>  $A(\cdot), B(\cdot)$  は共に二回連続的微分可能

Remark. この仮定3'は、 $A(\cdot), B(\cdot)$  の内いずれか一方が格子分布である場合を別に考察することで、結局、仮定3にまで強めることができる。

このとき、(1)又は(1')より、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$  に対して、

$$K(t) = K_i + M_i(t - i\tau) + R_i(t - i\tau)^2, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (14)$$

と表わせる。ここで、

$$K_i = 1 - \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} + A_{j-i}) \quad (15)$$

$$= \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+1} + B_{i+j}) \quad (15')$$

$$M_i = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - A_{j-i}) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+1} - B_{i+j}) \quad (16')$$

$$R_i = -\frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - 2A_{j-i} + A_{j-i-1}) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2\tau^2} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+2} - 2B_{i+j+1} + B_{i+j}) \quad (17')$$

と表わせる。(14)の第3項は、仮走'の下では  $R_i < +\infty$  となるから、 $\tau$  が十分小さいときには他の2項に比べて無視できる。

$$\text{i.e.,} \quad K(t) \cong K_i + M_i(t - i\tau) \quad \text{for } i\tau \leq t < (i+1)\tau \quad (18)$$

となり、 $A(i), B(i)$  と同様に  $K(i)$  もまた区分的線形関数で近似できる。 $A(i), B(i)$  が連続ゆえ  $K(i)$  もまた連続でなければならぬが、(18)は  $R_i$  を無視したために連続性が損われてしまう。従って、 $K(i)$  の連続性を保つために、 $\{K_i\}$  あるいは  $\{M_i\}$  のいずれかを補正する必要がある。 $K(i)$  が連続であるためには、

$$M_i = \frac{1}{\tau} (K_{i+1} - K_i) \quad (19)$$

あるいは、

$$K_i = \tau \sum_{j=-\infty}^{i-1} M_j \quad (20)$$

が成立する必要がある。このとき、今の『高土』に相当する  $\{K_i\}$  を基準にとり、『傾き』に相当する  $\{M_i\}$  を基準にとるかで次の2通りの補正方法が考えられる。

①  $\{K_i\}$  を基準とする場合 ... (19)より  $\{M_i\}$  は

$$\tilde{M}_i = \frac{1}{2\tau} \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(A_{j-i+1} - A_{j-i-1}) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2\tau} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j)(B_{i+j+2} - B_{i+j}) \quad (21')$$

と補正される。

②  $\{M_i\}$  を基準とする場合 ... (20) より  $\{K_i\}$  は

$$\tilde{K}_i = \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j+1} - B_j)(1 - A_{j-i+1}) \quad (22)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (A_{j+1} - A_j) B_{i+j} \quad (22')$$

と補正される。

前節と同様に、分布  $K(\cdot)$  を離散化した確率密度関数を

$$C^*(i) = K_i - K_{i-1} \quad i=0, \pm 1, \dots$$

$$\tilde{C}^*(i) = \tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1}$$

と定義すると、(15), (22) より

$$\begin{aligned} C^*(i) &= \frac{1}{2} \{ a(-i+1) * b(i-1) + a(-i) * b(i) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ c(i-1) + c(i) \}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tilde{C}^*(i) = a(-i) * b(i) = c(i) \quad (24)$$

となる。ここで、 $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  及び  $c(\cdot)$  は、夫々、(12) 及び (13) によって定義される。(24) が離散近似の場合と一致することに注意しよう。

$K(\cdot)$  に対する上述の区分的線形近似を  $w^{(n)}(\cdot)$  に対しても同様に応用する。 $w^{(0)}(t) = U(t)$  より、 $w^{(1)}(t) = K(t)$  となり、 $n=1$  のとき、 $w^{(n)}(\cdot)$  は連続な区分的線形関数で近似できる。 $n \geq 2$ ,  $iT \leq t < (i+1)T$  に対して、

$$W^{(n)}(t) = W_i^{(n)} + m_i^{(n)}(t-i\tau) \quad (25)$$

と表わせるものとする。(4)より、やはり  $i\tau \leq t < (i+1)\tau$  に対し

$$W^{(n+1)}(t) = W_i^{(n+1)} + m_i^{(n+1)}(t-i\tau) + r_i^{(n+1)}(t-i\tau)^2$$

と書き表わせる。ここで、

$$W_i^{(n+1)} = \tau \sum_{j=0}^{\infty} M_{i-j-1} \left( \frac{1}{2} m_j^{(n)} \tau + W_j^{(n)} \right) \quad (26)$$

$$m_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} (M_{i-j} - M_{i-j-1}) W_j^{(n)} \quad (27)$$

$$r_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (M_{i-j} - M_{i-j-1}) m_j^{(n)} \quad (28)$$

従って、 $\tau$  が十分小さいときには、 $i\tau \leq t < (i+1)\tau$  において

$$W^{(n+1)}(t) \cong W_i^{(n+1)} + m_i^{(n+1)}(t-i\tau)$$

なる区間的線形関数で近似できる。以下、帰納的に全ての自然数  $n$  に対して (25) が成立する。  $k(i)$  と同様な  $\tau$  次の項を除くことによって生ずる線形化誤差を連続条件：

$$m_i^{(n)} = \frac{1}{\tau} (W_{i+1}^{(n)} - W_i^{(n)}) \quad (29)$$

又は、

$$W_i^{(n)} = \tau \sum_{j=-\infty}^{i-1} m_j^{(n)} \quad (30)$$

を用いて補正する。

①  $\{W_i^{(n)}\}$  を基準とする場合… (29) より  $\{m_i^{(n)}\}$  は

$$\tilde{m}_i^{(n)} = \frac{1}{\tau} (W_{i+1}^{(n)} - W_i^{(n)})$$

と補正され、これを (26) に代入すると式を得る。

$$\begin{aligned} w_i^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_{i-j} - K_{i-j-1}) (w_{j+1}^{(n)} + w_j^{(n)}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (K_i - K_{i-1}) w_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} (K_{i-j+1} - K_{i-j-1}) w_j^{(n)} \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

②  $\{w_i^{(n)}\}$  を基準とする場合 … (30) より  $\{\tilde{w}_i^{(n)}\}$  は

$$\tilde{w}_i^{(n)} = \tau \sum_{j=-\infty}^{i-1} w_j^{(n)}$$

と補正される。従って、(27) より、

$$\tilde{w}_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} (K_{i-j} - K_{i-j-1}) \tilde{w}_j^{(n)} \quad (32)$$

を得る。(32) は離散近似による (9) と一致することに注意しよう。

以上より、Sequential PL Approximation を実行するにあたっては、 $K(\cdot)$  及び  $w^{(n)}(\cdot)$  の線形化誤差の補正法の組み合わせにより、次の4種の変形が存在することがわかる。

(i)  $\{K_i\}, \{w_i^{(n)}\}$  を用いる方法, i.e., (15), (31)

(ii)  $\{\tilde{K}_i\}, \{w_i^{(n)}\}$  “ “ i.e., (22), (31)

(iii)  $\{K_i\}, \{\tilde{w}_i^{(n)}\}$  “ “ i.e., (15), (32)

(iv)  $\{\tilde{K}_i\}, \{\tilde{w}_i^{(n)}\}$  “ “ i.e., (22), (32)

これら4つの近似法と離散近似との関係をより明確にするために、 $w^{(n)}(\cdot)$  を離散化した確率密度関数：



$$\begin{cases} p_n^*(i) = w_i^{(n)} - w_{i-1}^{(n)}, & i \geq 1 \\ p_n^*(0) = w_0^{(n)} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{p}_n^*(i) = \tilde{w}_i^{(n)} - \tilde{w}_{i-1}^{(n)}, & i \geq 1 \\ \tilde{p}_n^*(0) = \tilde{w}_0^{(n)} \end{cases}$$

について調べてみよう。(31), (32)より、前節と同様にして、

$$p_{n+1}^*(i) = \frac{1}{2} \left[ \pi(p_n^*(i+1) * c^*(i+1)) + \pi(p_n^*(i) * c^*(i)) - \{c^*(i+1) - c^*(i)\} p_n^*(0) \right], \quad (33)$$

$$\tilde{p}_{n+1}^*(i) = \pi(\tilde{p}_n^*(i) * c^*(i)) \quad (34)$$

が導かれる。(33), (34)は方法(i), (iii) について書き下したものであるが、方法(ii), (iv) に対しては、 $c^*(i)$  を  $\tilde{c}^*(i)$  で置き換えればよい。また、明らかに、方法(iv)を用いた場合には、 $n \geq 1$ ,  $i = 0, 1, \dots$  に対して

$$\tilde{p}_n^*(i) = p_n(i)$$

が成り立ち、方法(iv)は離散近似に他ならないことがわかる。

#### 4. $\{w_i^{(n)}\}$ の基本的性質

この節では、前節で考察した方法(i)~(iv)によって生成される系列(総称して $\{w_i^{(n)}\}$ で表わすことにする)が満たす幾つかの性質を証明なしに与える。

##### 補題 1.

$$K_{i+1} \geq K_i \quad \text{for all } i.$$

補題 2.  $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = 1$

これらの補題は、 $\{A_i\}, \{B_i\}$  が  $i$  に関して単調非減少で、極限值が 1 であることを用いれば、容易に証明される。

定理 1.  $W_{i+1}^{(n)} \geq W_i^{(n)}$  for  $n \geq 1, i \geq 0$ .

定理 2.  $\lim_{i \rightarrow \infty} W_i^{(n)} = 1$  for  $n \geq 1$ .

系.  $W_i^{(n)} \leq 1$  for  $n \geq 1, i \geq 0$ .

定理 3.  $W_i^{(n+1)} \leq W_i^{(n)}$  for  $n \geq 1, i \geq 0$ .

以上の定理 1 ~ 3 の証明は全て数学的帰納法になっている。

## 5. おわりに

離散近似と Sequential PL Approximation との関係を中心に、Lindley の積分方程式のある数値解法を紹介したが、 $\{W_i^{(n)}\}$  の  $n \rightarrow \infty$  での挙動については未知な部分が残っている。数値計算を実際に行なうにあたっての細かい工夫と共に、今後の重要な課題である。

\*\* References \*\*

- [1] Ackroyd, M.H., "Computing the Waiting Time Distribution for the GI/G/1 Queue by Signal Processing Methods," IEEE Transactions on Communications, COM-28, 52-58 (1980).
- [2] Ackroyd, M.H., "Iterative Computation of the M/G/1 Queue Length Distribution via the Discrete Fourier Transform," IEEE Transactions on Communications, COM-28, 1929-1932 (1980).
- [3] Kimura, T., "An Interpretation of the Discrete Approximation for the GI/G/1 Queue," in preparation.
- [4] Kimura, T., "On a Numerical Method for Solving the Lindley's Integral Equation - Part I: Basic Properties," in preparation.
- [5] Kleinrock, L., Queueing Systems, Vol. 2: Computer Applications, Wiley-Interscience, New York, 1976.
- [6] Lindley, D.V., "The Theory of Queues with a Single Server," Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 48, 277-289 (1952).
- [7] Spitzer, F., "The Wiener-Hopf Equation whose Kernel is a Probability Density," Duke Mathematical Journal, 24, 327-344 (1957).

Toshikazu KIMURA:

Department of Information Sciences,  
Tokyo Institute of Technology,  
Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152.